



TITLE:

『大成算經』卷之十六題術辯について (数学史の研究)

AUTHOR(S):

柏原, 信一郎

CITATION:

柏原, 信一郎. 『大成算經』 卷之十六題術辯について (数学史の研究). 数理解析研究所講究録 2005, 1444: 209-221

ISSUE DATE:

2005-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/47610>

RIGHT:

『大成算經』巻之十六 題術辯について

東京理科大学大学院 理学研究科 ¹ 柏原信一郎 (Shinichiro Kashiwabara)

Graduate School of Science

Tokyo University of Science

0. はじめに

0.1 大成算經について

大成算經は、当時を代表する数学者関孝和を初め、建部賢明、建部賢弘の一大プロジェクトとして1683年(天和3)の夏に編集が開始された。1695年(元禄の中年)頃に名前を『算法大成』とし、1710年(宝永7)に「大成算經」と名を改め全二十巻が完成。構成としては、首篇(巻之一の初めの部分)・前集(巻之一～巻之三)・中集(巻之四～巻之十五)・後集(巻之十六～巻之二十)の大きく四つから成り立っている。

0.2 大成算經巻之十六について

大成算經巻之十六には、タイトルに題術辯とあり、「全題」・「病題」・「實術」・「權術」・「偏術」・「邪術」の六つに分けられている。巻之十六の題術辯は、関孝和が書いた題術辯議之法(1685)をさらに展開したものになっている(0.5で2つの内容を比較する)。題術辯とは、言葉の通り問題と術(解法)に関して辯ずるという意味で、本文の内容から見ても巻之十六を表す適切な言葉である。実際、本文中には「今下八十七問悉論得失取捨之義而以爲設題施術之規範矣」とあるように、この巻之十六をもって問題・解法の良し悪しを論じ規範としたのだ。よって、巻之十六の特徴でもあるが、各問題毎に建部の主張が記されている。以下、これからその部分を解説と呼ぶことにする。次に、なぜこのような内容を書く必要があったのかを考えていくことにする。私は、巻之十六には二つ目的があったと思う。一つは、後集からは一般方程式論が書かれているが、巻之十六の本文の内容から見ると、巻之十七以降の紹介部分にしようとしたのではないかと考える。そして、もう一つは一般方程式論を考える前に一度解法の良し悪しをまとめ整理しておこうと思ったのではないか。その背景には、この時代遺題継承というものがあったが、解けない問題を出したり、偶然答えがあったり、人によって解き方が違ったりで混乱していたので書かれたという事が考えられる。ところで、巻之十六は後集の最初であるが、同じ中集の最初である巻之四とを見ると何か関連性があるように思う。巻之四ではどのように問題が成り立っているのか、巻之十六ではどのように問題を解くのかを論じており、この二つの巻には一貫性があるように思う。巻之四を理解するには巻之十六を、巻之十六を理解するには巻之四を読むべきであると思う。

0.3 巻之十六の執筆者について

大成算經は、関を初め、建部賢弘・賢明が書いたとされているが、巻之十六に関しては誰が書いたのか見当がつかない。しかし、この時関はすでに病でふしているの、考えられるのは建部兄弟の可能性が高い。そういうことをふまえ一応、ここでは執筆者を建部として統一している。私は、算学啓蒙諺解大成の建部の独自の解法をみると、巻之十六と同じこと(例えば、未知数の取り方や解の求め方)を主張しているので、賢弘が書いたのではないかと思う。

0.4 大成算經巻之十六の構成

先ほども書いた通り、大成算經巻之十六は「全題」・「病題」・「實術」・「權術」・「偏術」・「邪術」の六つに

¹ 現在は精華女子高等学校

分かれている。「全題」は問題の内容に欠点が無く、見・隠・伏・潜の四つに分かれる。見・隠・伏は、三部抄の解見題・解隠題・解伏題と同じものである。潜題は、大成算經卷之十六で初めて登場したと思われるが、超越方程式の問題になっている。しかし、四ついずれも問題しか載せられていない。また、問題には数と辭がお互いに相応しないものもある。一方、問題の解き方には「實」・「權」・「偏」・「邪」の四つが説かれている。以上が、卷之十六の構成だが、今回全てを説明することは無理なので、1.「未知数の取り方」・2.「解の求め方」・3.「『=』の考え方」の三つを説明する。

0.5 先行研究

[4]. 明治前日本数学史第二巻では4ページにわたり問題の解説を大まかに説明している。「實術」では、「九つの問題を通して説明されている」と一言で終わっており、説明が足りない部分が多くある。題術辯の先行研究はこれだけで、他に見当たらない。

ただし、題術辨議之法に関しては先行研究が [2]. 「関孝和全集」・[3]. 「算聖関孝和の業績」・[4]. 「明治前日本数学史」と三つある。そのうち、[4]. 「明治前日本数学史」と [2]. 「関孝和全集」では題術辨議之法を次のように紹介している。

「題術辨議之法は異色ある書である」 ([4]. 明治前日本数学史)

「題術辨議之法に相当するものは今の数学では見当たらない」 ([2]. 「関孝和全集」)

0.6 題術辨議之法から卷之十六への移行

題術辨議之法	病題 … 轉題・虚題・繁題・変題	⇒ 題術辯	全題 … 見題・隠題・伏題・潜題
	邪術 … 重・滯・擧・戻		病題 … 轉題・繁題・屑題・反題・虚題 ・変題・■題・散題
	權術 … 塞・斷・疎・碎		實術 … 九つの問題で説明 (好ましい解法) 權術 … 碎・索・斷・約・疎 (好ましくない解法) 偏術 … ■・□・略・塞・■ 邪術 … 重・滯・擧・戻

※■と□には、どの写本を見ても本文中に字が当てはめられていない。

ただ、病題の■は、伊達本大成算經卷之十八の本文が始まる前の最初のページに「翳題」と記されている。翳は「おおう」という意味があり、本文の内容から判断すると適切な言葉ではある。

1. 未知数の取り方

實術 (全九問) の中から四問を使い、建部が考える未知数の取り方を説明する。

まずは實術の概要を紹介する。

1.1 實術の概要

實術 … 答數の所爲と術中の所爲には各先後 (順序) があるとし、何が最も好ましい解法であるか論じている。

答數の所爲	問題が与えられた時の未知数の取り方
	解の求め方
術中の所爲	加減乗除の順序
	位を寄す順序
	真数と假の数の計算順序

これから、キーワードとして静数・動数が出てくるので、大成算經卷之四で定義された静数・動数について確認しておきたい。

数では、問題文にある数値を動、静に分けている。

静：本々具わっているもの

動：加減乗除をしたもの

※ただし、方程式を解いて得られる数であっても本々具わっているものは静としている。

1.2 實術の問題

實術の問題を使い、建部が考える未知数の取り方を説明する。

實術の第一問目、

「假如有銀二百三十錢支甲乙丙丁戊五人只云從甲衰差各七錢問各支銀」

これは、銀 230 錢を甲乙丙丁戊の 5 人に甲から 7 錢ずつ減らしながら分けていった時に、5 人それぞれいくら分け与えるかという問題である。建部が主張している解法では、甲支銀を x とおくと、

$$x + (x - 7) + (x - 14) + (x - 21) + (x - 28) = 230$$

となり、 $x = 60$ 。戊支銀を x とおくと、

$$x + (x + 7) + (x + 14) + (x + 21) + (x + 28) = 230$$

これを解くと $x = 32$ となる。以上、建部は二通りの解法を主張している。一方、建部が批判している解法があるので紹介しておく。丙支銀を x とおくと、

$$x + x + x + x + x = 230$$

となり簡単に、 $x = 46$ が出てくる。この解法の方が、簡単な式になり解を求めやすくなっているが、建部はこれを批判している。解説に、「此題先求於丙支銀則雖其技太速得本末于後故不爲求最初之數也」とあるように、甲乙丙丁戊の 3 人目から求めているので最初に求める数ではない批判している。建部は未知数に関して静数・動数を定義し、静数から求めようとしているのだ。この問題では、甲支銀・戊支銀が静数であり、それ以外は動数である。この二つの静数が分かれば、問題を成り立たせている全てのものが明らかになると考えているのではないか。

實術の第二問目、

「假如有平方只云方面不及斜五寸問方及斜」

これは、正方形があり一辺は斜辺より五寸短いという問題である。

建部が主張している本文の解法では、方面を x とおくと、

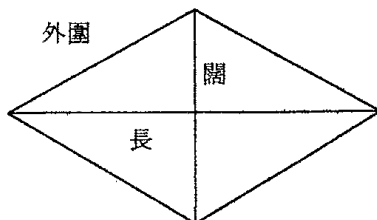
$$\begin{cases} x = y - 5 \\ x^2 + x^2 = y^2 \end{cases}$$

このような問題は高校初年度で出てくるが、今日では式を立てさえすれば x, y どちらを先に求めても良い(勿論、簡単に答えが出る方を先に求めるだろうが)。しかし、建部は答数には先後があるとし、未知数の取り方について言及している。ここでは、先に正なる形 x について解くことを主張しており、先に斜について解くことを批判している。一応、斜を x として解くと、正となる二つの答えが出てくるが、それから方を求めると一方の答えが負になってしまう。もちろん、方を x として先に解いても一方の解が負になるが、こ

の場合求めた時点ですぐに分かる。この点から考えると、一辺から求めた方がいいことになる。建部はこの問題に関して、正形(縦と横)・偏形(正形以外のもの)を定義した上で、先に求める未知数を決定している。

實術の第三問目、

「假如有梭闊六寸只云長與外圍和共二尺八寸問圍」



この問題は、ひし形の問題である(外圍とは、外周の長さである)。
外圍を x とおくと、

$$4(28 - x)^2 - x^2 = 4 \times 6$$

とし、 $x = 20$ となる。解説に、「此題唯依問外圍之一數雖形偏從其數求之若並問之則先從長可得之也」とあるように、この問題は偏なる形である外圍しか求められていない。もし、すべてが求められていたら、先に長を x として求めよと主張している。これは、偏っている形というのは縦と横の辺から作られていると考えているのではないか。だから、根本となる長が大切なので先に求めよと言っている。

實術の四問目、

「假如有入買絹布共總一十尺只云絹價多如布價一錢又云每銀一錢對絹一尺布二尺問買絹布及價」

この問題は、絹と布合わせて一十尺買うと、買った絹の金額は布の金額より一錢多く、一錢に対して絹は一尺、布は二尺買えるという。その時、買った絹と布そしてそれぞれの金額を求めよという問題。そこで、建部が主張している解法では、買った絹と布どちらでも良いが先にこの二つを求めている。買う絹を x 、買う布を y とすると、

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ \frac{1}{1}x = \frac{1}{2}y + 1 \end{cases}$$

これを解くと、 $x = 4, y = 6$ となる。求める順番は x, y どちらでもよいが、絹價と布價は動数となるので、後で求めることになる。一応、建部が批判している解法だが、絹價と布價を未知数として式を立ててみよう。絹價を x 、布價を y とすると、

$$\begin{cases} x = y + 1 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$$

このように式を立てたほうが先のものよりも解を求めやすい。つまり、建部は未知数の取り方に関しては、解法の難易に依っていないことが分かる。実際に實術の説明に「不拘術理之難易而先得其數是求答數之要也」とあるように、静数とは答数の要となるので解法の難易に依らず先に静数から求めることを主張している。

1.3 まとめ

今までの四つの問題を解いた結果、次のように未知数を立てていることが分かる。

$$\begin{array}{l} \text{象} \left\{ \begin{array}{l} \text{静数} \cdots \text{先に未知数として求める} \\ \text{動数} \cdots \text{静数を求めた後で求める} \end{array} \right. \\ \text{形} \left\{ \begin{array}{l} \text{正形} \cdots \text{先に未知数として求める} \\ \text{偏形} \cdots \text{正形を求めた後で求める} \end{array} \right. \end{array}$$

動数・偏形というのは、静数・正形があつて存在するものである。つまり、建部は、静数・正形を数学の問題を成り立たせるものとし、簡単に解ける解けないに関係なくそれを直接求める解法こそが大切であると考えていたと言える。

※象形は、大成算經卷之四で説明されている。象形に関しては、昨年の『数学史の研究』で尾崎氏が発表しているので、昨年の講究録を見てほしい。

2. 解の求め方

権術の斷の問題を使って、建部が考える解の求め方を説明する。まずは、権術の構成を紹介する。

2.1 権術の構成

権術 … 好ましくない解法だが、問題や学ぶ者の力に応じて使う方法。

碎 … 加減乗除を使わず目の子で求める解法

擦 … 逐次近似法によって解くもの

斷 … 実術と反対に求め易い数から求める解法

約 … 眞数を除して開方式を作る方法

疎 … 比例定数を計算した後、それを掛けたり割ったりして答えを求める

2.2 権術の斷の問題

これから、建部が考える解の求め方を説明する。

斷の第二問目、

「假如有梭積一十八寸只云長爲實平方開之得數與闊爲實平方開之得數和共五寸問長闊」

これは、菱形の問題である。長を x 、闊を y とすると、

$$\begin{cases} \frac{1}{2}xy = 18 \\ x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = 5 \end{cases}$$

これを解けばよい。しかし、本文中では、 $X = x^{\frac{1}{2}}, Y = y^{\frac{1}{2}}$ とおいて解き、後は、 X と Y を自乗して解いている。解説には、「此術先依求于商數術中之理易曉也」とあるように、この解法が分かりやすいと認識している。しかし、建部は最後の解説でこの解法を批判している。

斷の第三問目、

「假如有勾股積二百一十寸只云弦三尺七寸問勾股」

これは、直角三角形の問題である。勾を x 、股を y とすると、

$$\begin{cases} \frac{1}{2}xy = 210 \\ x^2 + y^2 = 37^2 \end{cases}$$

普通なら勾と股が問われているので、上の式を立てる。しかし、本文で批判している解法では、先に $y-x=23$ として勾と股の差を先に求めているのだ。実際に本文通りに式を立て解を求めよう。
 まずは、算木を用いずに $y-x$ を求めている。

$$\begin{aligned}(y-x)^2 &= y^2 - 2xy + x^2 \\ &= 37^2 - 2 \times 420 \\ &= 529 \\ y-x &= 23\end{aligned}$$

それから算木を用いて次のように式を立て解いている。

$$\begin{cases} \frac{1}{2}xy = 210 \\ y-x = 23 \end{cases}$$

解説には、「此術亦二次求之故雖損功就簡而施之也」とある。建部も二回開法術を使用するといっても、解きやすくなるとこの解法の方が良いことは認識しているのだ。しかし、最後にはこの解法を批判している。

2.3 算学啓蒙諺解大成 第三十問目、第三十一問目

算学啓蒙諺解大成に以上見てきたように建部の独特の解法があるので二問紹介しておく。

第三十問目、

「今有方錐積九千四百八尺只云高爲實平方開之得數少如下方二十二尺問下方及高」

下方を s 、高を t とおくと、以下の連立方程式が成り立つ。

$$\begin{cases} \frac{1}{3}s^2t = 9408 \\ \sqrt{t} = s - 22 \end{cases}$$

朱世傑の解法では、

$$\begin{aligned}T &= \sqrt{t} \text{ として} \\ s &= T + 22 \\ s^2 &= (T + 22)^2 \\ T^2(T + 22)^2 &= 28224 \\ T^4 + 44T^3 + 484T^2 - 28224 &= 0\end{aligned}$$

この四次方程式を解き T の値を出し、自乗して $t=36, s=28$ と出している。
 一方、建部の解法を紹介すると、

$$\begin{aligned}s^2 &= (\sqrt{t} + 22)^2 \\ t(\sqrt{t} + 22)^2 &= 38224 \\ 44t\sqrt{t} &= 28224 - (t^2 + 484t) \\ \text{自乗して整理すると、} \\ t^4 - 968t^3 + 177808t^2 - 27320832t + 796594176 &= 0\end{aligned}$$

この解法も四次方程式になるが、係数がとても大きいので解を出すのは難しい。今ではこのような問題が出ると、朱世傑の解法でやるのが適切である。しかし、建部はあくまでも直接未知数を求める解法を主張し

ている。この建部の解法では、今の高校生でもできるが次の問題はそう簡単に解けるものではない。

第三十一問目、

「今有円錐積三千七十二尺只云高爲實立方開之得數不及下周六十一尺問下周及高」

この問題は円錐の問題である。下周とは円周のことである。高を h 、下周を y とすると、

$$\begin{cases} y = h^{\frac{1}{3}} + 61 \\ y^2 h = 110592 \end{cases}$$

朱世傑の解法は、 $H = h^{\frac{1}{3}}$ とおき、 H について解き三乗して答えを求めている。しかし、建部の解法は直接 h について解いている。解法の流れは本文中に書かれてあるが読み解くのは難しい。この算学啓蒙諺解大成をみても建部の考えが良く分かる。

※この問題の解法を知るには、2004 年「数学史の研究」講究録の森本先生が書かれた所を参照されたい。

2.4 まとめ

今まで解の求め方について見てきた。何を使ってでもいいからとにかく答えを出すことと、問題になっているものを直接未知数として求めていくことでは、全く解法の難易度が違ってくるのが分かる。では、建部の考えはどうだったのか。最後の解説を見ると「雖術理不統皆取捷徑幼学之所用也」と本文中にある。捷徑を取るとは、早く解を導くということ。つまり、建部は術理の難易に拘わらず、問題で問われているものを直接求めていくことが大切であり、実力があるものだとして認識しているのだ。建部はこのように問題の構成と解法にも研究し、独自の考えを持った人間だというのがこの巻之十六でよく分かる。

3. 『=』の考え方

和算では、「術に曰く～」という部分で解法を記している。そこでは、今日のように左辺と右辺の変形が同時に記載されていない。まずは、左辺を計算しその結果を左に寄せた後、右辺を計算し相消する。そのため、他人が見るとどのようにその問題を解いたのかが分からない時がよくある。なぜ、左辺と右辺の変形を同時に記載しなかったのか不思議である。その疑問に対して、建部自身が偏術の■と□の部分で言及しているので、それらを見ていくことにする。

3.1 偏術について

偏術 … 問題の解法や解答の書き方に偏りがあるもの。

■ … 註をつけて解説を加えているもの

□ … 註をつけず説明の足りないもの

※上の■と□は反対のことを言っているが、どちらもいけないものだと非難している

略 … 算木を使用せず問題を解く方法

塞 … 最後の結果(開方式)だけを述べたもの

■ … 天元術を無理に用いるもの

※■と□には、どの写本を見ても本文中に字が当てはめられていない。

3.2 ■の問題

第一問目、

「假如有米五斛麥七斛共價銀四百九十五錢只云米斛價爲實開平方數與麥斛價爲實開平方數和共一十三錢問二色斛價」

米斛價を x 、麥斛價を y とすると、

$$\begin{cases} 5x + 7y = 495 \\ x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = 13 \end{cases}$$

という式が出てくる。本文にある通り計算過程を書いていくと、

$$\begin{aligned} \frac{x + y + 2(xy)^{\frac{1}{2}}}{y + 2(xy)^{\frac{1}{2}}} &= 169 \\ \frac{7y + 7 \cdot 2(xy)^{\frac{1}{2}}}{7 \cdot 2(xy)^{\frac{1}{2}}} &= 1183 - 7x \\ \frac{7 \cdot 2(xy)^{\frac{1}{2}}}{7 \cdot 2(xy)^{\frac{1}{2}}} &= 7(169 - x) - (495 - 5x) \\ &= -2x + 688 \\ 7^2 \cdot 2^2 \cdot (xy) &= (-2x + 688)^2 \\ &= 4x^2 - 2752x + 473344 \cdots (\text{再寄}) \\ 4 \cdot 7x \cdot 7y &= 4 \cdot 7x \cdot (495 - 5x) \end{aligned}$$

再寄と相消し、

$$144x^2 - 16612x + 473344 = 0$$

後は、二次方程式を解けば答えが出る。この過程で、下線部分の式は、本文中に言葉で説明されている部分である。例えば初めの下線部分の式は割り字で、「内有米斛價一箇麥斛價一箇米商麥商相乘二段」と書かれている。つまり、 $x + y + 2(xy)^{\frac{1}{2}}$ と書かれており、左辺と右辺を同時に変形していることが分かる。このように変形を書けば、どのように問題を解いたのか分かりやすい。しかし、建部は解説に、「此術中毎段所分註悉雖是有繁擾之弊也」とあるように、毎回左辺・右辺を同時に変形する文を書くと、ごたごたして混乱してしまうとあり、その方法を批判している。

第二問目、

「假如有大中小立方各一只云大中方差五寸中小方差三寸又云大方面開平方數與中方面開平方數及小方面開平方數相并共六寸問三方面」

この問題は、大きさの異なった三つの立方体の問題である。

大方面を x 、中方面を y 、小方面を z として式を立てると、

$$\begin{cases} x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} + z^{\frac{1}{2}} = 6 \\ y = x - 5 \\ z = y - 3 \end{cases}$$

本文中通りに計算過程を書くと、

$$\begin{aligned} x(z + y) &= 2x^2 - 3x \\ \{(2x^2 - 3x) + (x - 5)(x - 8)\} \times 4 &= 12x^2 - 104x + 160 \cdots (\text{寄左}) \\ (x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} + z^{\frac{1}{2}})^2 &= 6^2 \\ \frac{x + y + z + 2(xy)^{\frac{1}{2}} + 2(yz)^{\frac{1}{2}} + 2(xz)^{\frac{1}{2}}}{2(xy)^{\frac{1}{2}} + 2(yz)^{\frac{1}{2}} + 2(xz)^{\frac{1}{2}}} &= 36 \\ \frac{2(xy)^{\frac{1}{2}} + 2(yz)^{\frac{1}{2}} + 2(xz)^{\frac{1}{2}}}{2(xy)^{\frac{1}{2}} + 2(yz)^{\frac{1}{2}} + 2(xz)^{\frac{1}{2}}} &= 49 - 3x \\ \text{これを 2 乗すると、} \\ 4\{xy + yz + zx + 2(xy)^{\frac{1}{2}}z + 2(yz)^{\frac{1}{2}}x + 2(xz)^{\frac{1}{2}}y\} &= 9x^2 - 294x + 2401 \\ \text{寄左を減じた余りは、} \\ 8(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})\sqrt{x}\sqrt{y}\sqrt{z} &= -3x^2 - 190x + 2241 \end{aligned}$$

これを2乗すると、

$$\begin{aligned} & \frac{36 \cdot x \cdot 64y \cdot z}{=} 9x^4 + 1140x^3 + 22654x^2 - 851580x + 5022081 \cdots (\text{再寄}) \\ & 36 \cdot x \cdot 64y \cdot z = 2304x^3 - 29952x^2 + 92160x \end{aligned}$$

よって、再寄と相消し、

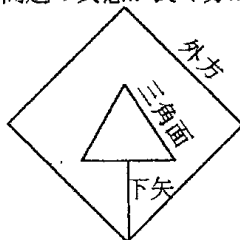
$$9x^4 - 1164x^3 + 52606x^2 - 943740x + 5022081 = 0$$

後はこの四次方程式を解けばよい。この問題でも、下線部分は割り字で右辺の変形している部分である。しかし、建部はこの問題の解説にあるように、「此術毎自乗之註皆無其益也」とし、自乗するごとに右辺の変形を書いても利益がないと主張している。

第三問目、

「假如有方内三角外積五十寸只云下矢四寸問外方」

本文だけでは問題の真意が良く分からないので、本文中にある図を描いておく。



外方を x とおくと、

$$\begin{aligned} & (\text{三角積}) = (\text{外方})^2 - 50 = x^2 - 50 \\ & \frac{108(\text{三角平径})^4}{=} 4(\text{三角積})^2 \cdots (\text{寄位}) \\ & \frac{2(\text{半斜})^2}{=} (\text{方})^2 = 2\{(\text{矢}) + (\text{三角平径})\}^2 \\ & \frac{2(\text{三角平径})^2 + 4(\text{三角平径})(\text{矢})}{=} (\text{方})^2 - 2(\text{矢})^2 \\ & \frac{432(\text{矢})^2(\text{三角平径})^2 + 432(\text{矢})(\text{三角平径})^3 + 108(\text{三角平径})^4}{=} 27\{(\text{方})^2 - 2(\text{矢})^2\}^2 \\ & \frac{(\text{矢})(\text{方斜}) \times 18(\text{三角面})^2}{=} 27\{(\text{方})^2 - 2(\text{矢})^2\}^2 - (\text{寄位}) \\ & \frac{(\text{矢})^2(\text{方斜})^2 \times 324(\text{三角面})^4}{=} \{27\{(\text{方})^2 - 2(\text{矢})^2\}^2 - (\text{寄位})\}^2 \cdots (\text{再寄}) \\ & \frac{1}{2}(\text{方斜})^2 = (\text{外方})^2 \\ & 864(\text{外方})(\text{寄位})(\text{矢})^2 = 55296x^6 - 5529600x^4 + 138240000x^2 \end{aligned}$$

よって、再寄と相消すると

$$529x^8 - 116384x^6 + 7293184x^4 - 185113088x^2 + 311451904 = 0$$

これを解くと、 $x = 10.3221$ となる。ここで三角平径という言葉があるが、正三角形の内接円の半径のことを意味している。この問題の解説に「是又所釋皆術中之浮辭也」と書かれており、下線部分の右辺は浮辭であり意味がないと主張している。浮辭とは、表面的な文章ということで本質的でないということである。

三問まとめた最後の解説には「如是等者各去分註而可用之若題中屢累技者悉欲分其名而註之則太繁乱而輒難得適數故不用此法也」とある。つまり、「左辺と右辺の変形を同時に書いていくと、繁乱して答えを求めにくくなるので書くな」と主張している。今日では、そのような方法では逆に分かりにくい。ただ、この■の問題では、註を付けるなど言っているが、次の□の問題では逆に註を付けて術理を分かりやすくしろと主張している。では、これから□の問題を紹介し、■と比較し何を言いたいのか考えてみることにする。

3.2 口の問題

第一問目、

「假如上米一十四斛下米一十五斛支一十二人只云上一人支米不及下一人支米一斛問各一人支米」
 上一人支米を x 、下一人支米を y とすると、

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ \frac{14}{x} + \frac{15}{y} = 12 \end{cases}$$

この連立方程式を解けば良いが、本文の解法では、

$$(\text{人数})xy = 12x^2 + 12x \cdots (\text{寄左})$$

$$(\text{上米})y = 14x + 14$$

$$(\text{下米})x = 15x$$

よって、

$$(\text{上米})y + (\text{下米})x = 19x + 14$$

(寄左) と相消して、

$$12x^2 - 17x - 14 = 0$$

として解いている。これを解法①と呼ぶことにする。解説には「此術每相乗各不釋其義故理不明也」とあるように、一見本文中の解法を見ても意味が分からない。では、一体どのように義を釋していけばいいのか。実は、同じ分数式の問題が大成算經卷之八にあった。以下それを参照しながら解いてみることにする。
 上一人支米を x 、下一人支米を $x+1$ とすると、

当時、分数表記がなかったので「維乗」して両辺の分母をはらったものを最初に考えている。

$$(\text{下米})(\text{上一人支米}) + (\text{上米})(\text{下一人支米}) = 15(\text{下一人支米})(\text{上一人支米})$$

$$(\text{下米})(\text{上一人支米}) + (\text{上米})(\text{下一人支米}) = 15x + 14(x+1) \cdots (\text{寄左}) \text{ 爲因一十五段下一人支米上一人支米}$$

$$15(\text{下一人支米})(\text{上一人支米}) = 15x(x+1)$$

よって、

$$(\text{上米})y + (\text{下米})x = 19x + 14$$

(寄左) と相消して、

$$12x^2 - 17x - 14 = 0$$

これを解法②とすると、解法①と解法②では (下米)(上一人支米)+(上米)(下一人支米)=15(下一人支米)(上一人支米) と与えられたときに、左辺・右辺どちらを先に計算しているかの違いがある。解法①では右辺を、解法②では左辺を先に計算している。そして、解法②では、左辺を計算した後に「爲因一十五段下一人支米上一人支米」と註し右辺を示しているのだ。「爲因…」という記法は古今算法記や發微算法にもよく出てきており、括弧を記さずに計算手順がわかる記法である。確かに、この記法を使うと解法②の方が右辺を同時に示され分かりやすい。この他に、二つ義を註する方法を考えたので一応紹介しておく。
 一つ目は、初めに次のように算を布く。

上一人支米	14
下一人支米	15

そして、本文中では「左行を相乗し人数を以て相乗し左に寄す。左行、右行を互乗し二位を相併し、寄左と相消す。」と記す方法。

二つ目は、

$$(\text{人数})xy = 12x^2 + 12x \cdots (\text{寄左})(\text{内有下一人支米一十四段上一人支米一十五段})$$

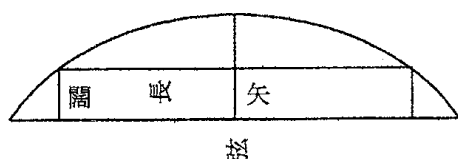
と割り字で右边を「内有～」というように、名を註する。ここで、「内有～」というのは右边が多項式を展開しているものになっている場合用いられ、「爲因～」という記法は多項式と多項式の乗法のために用いられている。

この二つの方法を考えてみたが、「内有～」という記法は前の■で禁止され、1つ目の算の布き方は和算書には無かったものなので無理である。よって、大成算經卷之八にあるように、建部は解法②の方法で註せよといていると私は思う。

第二問目、

「假如有弧内容長六寸之直只云矢二寸弦八寸間直闊」

問題に図が描かれている。



本文の解法では、直闊を x とおくと、

$$\begin{aligned} (\text{矢}) - (\text{直闊}) &= 2 - x \cdots (\text{寄左}) = (\text{小矢}) \\ 4(\text{半徑})(\text{矢}) &= 4(\text{矢})^2 + (\text{弦})^2 = 80 \\ 80(\text{寄左}) &= 160 - 80x \cdots (\text{再寄}) \\ 4(\text{徑})(\text{小矢})(\text{矢}) &= (4(\text{寄左})^2 + (\text{長})^2) \times (\text{矢}) = 8x^2 - 32x + 104 \end{aligned}$$

再寄と相消して、

$$8x^2 + 48x - 56 = 0$$

解説には「此術亦略得數之名故不足于誘所爲之理也」とある。本文の解法では、下線部分のように名を註していないので非難している。

第三問目、

「假如有直錐積六十四寸只云縱横差二寸又云横不及高四寸問縱横及高」

ここで、直錐とは四角錐を表している。高を x とおくと、結局

$$\frac{1}{3}x(x-4)(x-2) = 64$$

となりこの三次方程式を解けば良い。しかし、本文中の解法では式の左辺をプラスとマイナスで括り計算している。つまり、

$$(\text{高})^2(\text{只云数}) + (\text{又云数})^2(\text{高}) + (\text{高})^3 = 3(\text{積}) + (\text{只云数})(\text{又云数})(\text{高}) + (\text{又云数})(\text{高})^2$$

として、方程式

$$x^3 - 6x^2 + 8x - 192 = 0$$

を求めている。

解説に「此術括而述之故理難通而却文繁其技亦漸遲也」とあるように、本文の解法では意味がわかりづらく

文も多くなると非難している。

以上口の問題をみてきたが、ではどのように右辺の変形を記載していけばいいのか疑問がある。その疑問を解決するように、右辺の変形を傍書法で書かれている問題を見つけた。それは、大成算經卷之十九の隱題第五問目から九問目までであるのだが、それを見ると解法の部分と別に演段というものがあり、そこで右辺の変形を傍書法で書かれているのだ。そこで、卷之十九隱題第五問目の問題を取り上げ、本文に書かれている解法を記した上で右辺の変形をどのように書けばいいのか考えていこうと思う。

3.3 大成算經卷之十九第五問目

「假如有直只云長開平方數與闊開平方數加入積共四十一寸又云長闊差五寸問長闊」

この問題は、闊を x 、長を y とすると、

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} + xy = 41 \\ y - x = 5 \end{cases}$$

以下、本文の解法を記す。

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 41 - x(x+5) = -x^2 - 5x + 41$$

二乗すると、

$$x + y + 2\sqrt{xy} = x^4 - 57x^2 - 410x + 1681$$

$$2\sqrt{xy} = x^4 - 57x^2 - 412x + 1676$$

二乗すると、

$$4xy = x^8 + 20x^7 - 14x^6 - 1964x^5 - 1639x^4 + 80488x^3 - 21320x^2 - 1381024x + 2808976$$

$$4x(x+5) = 4x^2 + 20x$$

(寄左) と相消して、

$$x^8 + 20x^7 - 14x^6 - 1964x^5 - 1639x^4 + 80488x^3 - 21324x^2 - 1381044x + 2808976 = 0$$

下線部分で引かれている部分が、演段で傍書法を使用されている所である。卷之十九隱題の五問目から九問目までは、演段に傍書法で右辺の変形が書かれている。これを見ると、確かに偏術■の問題にある右辺を「内有～」という記述より断然分かりやすい。

3.4 まとめ

偏術にある■と□では主張していることが全く逆である。まず、その違いを考えることにする。■では、左辺の変形をした後、「内有～」という独自の記法で右辺を多項式を展開したもので表したために建部が批判している。一方、□では左辺の変形をした後、右辺を多項式と多項式の乗法で表す「爲因～」という記法を使い損ねたために批判している。(「爲因～」という記法は古今算法記・發微算法に見られ、因は乗法の意味である)。つまり、左辺を変形した後、「爲因～」という記法は使用して良いが、「内有～」という記法を使用してはダメだと主張しているのだ。では、なぜそのように建部は主張しているのか、私は三つ理由を考えてみた。以下それを記す。

1. 先ほどの卷之十九の問題でみたように、漢文ならではだが、右辺が多項式で表されている場合、わざわざ割り字で記すと文が多くなり大変な量になってしまうと考えたのではないかな。

2. 「内有～」の後、多項式を展開したものを文章で書き表しているが、当時そういう記法を読み解くのはかなり難しかったのではないかな。実際に、文章でひたすら書き表しているのていろんな意味にとらえられ

てしまう可能性がある。文章で書かれるよりは傍書法で書かれたほうが計算した結果が目に見えるし理解できる。そのため、「術曰～」で天元の一を立てて文章で計算過程を書いた後必ず算木を使って結果を表している。算木を使わずに計算過程を書くことは、偏術「略」という所でも批判している。実際に、略の第三問目の解説では「此術中悉略諸数而不註畫式故難備答數之証也」と批判している。

3. 毎回右辺の式を左辺の式と同時に書いてもあまり意味がないと考えたため右辺を記さなかった考える。なぜなら、基本的に方程式を立てて左辺を中心に計算過程を書けば、「内有～」という記法を使い同時に右辺を書かなくても、それに従い答えを導き出すことは出来るからだ。

以上、右辺の多項式を展開したものを表す記法が許されなかった理由を考察としてを三つあげた。「爲因～」というのは、多項式の乗法を表したもので文も多くなく古今算法記にも使われずでに親しまれていたため、右辺の変形を表す記法として使われていたと考える。また、それを使用しないと偏術口の問題でみたように、術理が不明になることがある。もし、右辺の多項式を展開したものを記したければ、演段という別の枠で傍書法を使って表わすしかないのである。これは、第2章巻之十六の概要の中で巻之十九の問題を参照して説明させてもらった。

どの理由にしる和算の問題では全ての問題に演段(右辺の変形を詳しく述べたもの)が少なく本文にある解法が分かりにくい時がある。そのため建部のこの考えに基づけば、問題を解くに当たり他の人が見ても分からなくなってしまう恐れがあることは確かである。

最後に■と□には何が入るのかを考えてみた。

■には、余るという意味の「盈^{えい}」という辭を当てはめたい。

□には、説明が足りないということで「臆^{おそ}」という辭を当てはめたい。

※演段とは、大成算經巻之十九に「演段者述隱伏潛三題之術也」とあるように、一つの術である。隱題では、図を使って説明していたり、右辺の変形を傍書法で表したりしており、伏題・潛題の問題では、行列式を使い未知数を1つずつ消去していく過程を詳しく述べている。

参考文献

[1] 「大成算經」

東北大学狩野文庫 所蔵, 宮城県図書館 伊達文庫 所蔵, 東京大学 所蔵, 東京理科大学 所蔵, 九州大学 所蔵, 京都大学 所蔵(2種類), 大阪府立図書館 所蔵

[2] 平山諦・下平和夫・広瀬秀雄,「関孝和全集」(1995),大阪教育図書,pp.117-126

[3] 加藤平左エ門,「算聖関孝和の業績」(1972),棋書店

[4] 日本学士院,「明治前日本数学史 第二巻」(1983),岩波書店

[5] 藪内清 編,「中国天文学・数学集」(1980),朝日出版社

[6] 林鶴一,「和算研究集録 上巻」(1937),東京開成館

[7] 遠藤利貞遺・三上義夫・平山諦,「増修日本数学史」(1981),恒星社厚生閣

[8] 京都大学数理解析研究所,数理解析研究所講究録「数学史の研究」(2003,2004)